# Esercizi proposti su matrici e determinanti

**Esercizio 1.** *Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

*è invertibile.*

**Esercizio 2.** *Discutere al variare del paramentro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema*

$$\begin{cases} x_1 + (k-1)x_2 + kx_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + kx_3 = 0 \\ (k-1)x_1 + (k-1)x_2 = k \end{cases}$$

**Esercizio 3.** *Calcolare il rango della seguente matrice, al variare di $k \in \mathbb{R}$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 4.** *Discutere al variare del paramentro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + kx_2 = 1 \\ 2x_1 + (k-1)x_2 = 1 \\ (1-k)x_1 + 3x_2 = k+1 \end{cases}$$

**Esercizio 5.** *Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ così definita*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 - kx_3, x_2 - x_3, (k-1)x_3).$$

- *Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di $T$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.*
- *Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(0, -1, 3, 1)$ appartiene all'immagine di $T$.*

# Soluzioni

**Soluzione 1.**

Abbiamo che

$$det\,(A) = (-1)^4 \cdot k \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} = k \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} = -k \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -k$$

Si trova che $A$ è invertibile per $k \neq 0$.
□

**Soluzione 2.**

Il determinante della matrice dei coefficienti è $k(k-1)(k-2)$, e si annulla quindi per $k = 0, 1, 2$. Per $k \neq 0, 1, 2$ la matrice dei coefficienti ha rango 3, il sistema è compatibile e possiede l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k^2}{(k-1)(k-2)} \\ \frac{-2k}{-3k+k^2+2} \\ \frac{1}{k-1} \end{pmatrix}$$

Per $k = 0$ si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

che possiede le infinite soluzioni $\left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.
Per $k = 1$ si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

che è incompatibile.
Per $k = 2$ si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

che si dimostra (puoi usare il Teorema degli orlati) essere incompatibile.
□

**Soluzione 3.**

Osserviamo che la matrice $A$ è una matrice a blocchi del tipo

$$\begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A'' & 0 \\ 0 & 0 & A'' \end{pmatrix}.$$

dove $A' = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A'' = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & k \end{pmatrix}$, $\quad A''' = (k-2)$.
In generale se $M$ è una matrice a blocchi $n \times n$ del tipo

$$M = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}.$$

con $B \in M_{h,h}(\mathbb{R})$, $C \in M_{h,n-h}(\mathbb{R})$ e $D \in M_{n-h,n-h}(\mathbb{R})$, allora $det(M) = det(B)det(D)$.
Nel nostro caso questo significa che $det(A) = det(A')det(A'')det(A''') = (4-k^2)(3k+3)(k-2)$.
Il rango di $A$ è 5 se $k \neq -1, 2, -2$.
Per $k = -1, -2$ si vede che il rango di $A$ è 4. Mentre per $k = 2$ il rango di $A$ è 3.
□

**Soluzione 4.**

Dal teorema di Rouché Capelli sappiamo che il sistema è compatibile se $rg(A) = rg(A|b)$, dove con $A$ indichiamo la matrice dei coefficienti e con $(A|b)$ la matrice completa del sistema. Nel nosro caso abbiamo che

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 2 & k-1 \\ 1-k & 3 \end{pmatrix}, \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 2 & k-1 & 1 \\ 1-k & 3 & 1+k \end{pmatrix}.$$

Il $det(A|b) = -1-3k$. Si dimostra che il sistema è compatibile solo per $k = -1/3$ e per tale valore di $k$ l'unica soluzione è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.
□

**Soluzione 5.**

Consideriamo la matrice associata all'applicazione lineare rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -k \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango di $A$: (facciamo qualche passo di riduzione con Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -k \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -k \\ 0 & 0 & -1-k \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

A questo punto osserviamo che il rango di $A$ è sempre 3. Da cui $\dim \operatorname{Im} T = 3$. Per quanto riguarda la seconda domanda, osserviamo che il sistema ammette soluzione quando $\operatorname{rg}(A) = rg(A|v)$. Abbiamo appena visto che $\operatorname{rg}(A) = 3$, quindi il sistema ammette soluzione se anche $\operatorname{rg}(A|v) = 3$, cioè se $\det(A|v) = 0$. Calcoliamo quindi il determinante della matrice ridotta:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -k & -1 \\ 0 & 0 & -1-k & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 3k.$$

Dunque $v$ appartiene all'immagine di $T$ se $k = 1/3$.

□